MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
ET
DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

1977 E.I. T.P.E. ×II5×

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

— OPTION M —

(temps accordé : 3 heures)

Présentation du problème :

Soit E l'algèbre des fonctions numériques définies sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Le but du problème est de préciser les applications de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

$$\left.\begin{aligned} &|\tau(f+g) - \tau(f) - \tau(g)| \leqslant c \\ &|\tau(f.g) - \tau(f).\tau(g)| \leqslant c \end{aligned}\right\} \quad \forall f, \forall g \in E \qquad (1)$$

c étant un réel positif donné.

— Dans un premier temps, on montre qu'il existe une application unique associée à τ, notée u_τ vérifiant :

$$\left.\begin{aligned} &(a)\quad u_\tau(f+g) - u_\tau(f) - u_\tau(g) = 0 \\ &(b)\quad u_\tau(f.g) - u_\tau(f).u_\tau(g) = 0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall f, \forall g \in E \qquad (2)$$

$$\text{et} \quad \forall f \in E,\ |u_\tau(f) - \tau(f)| \leqslant c$$

— Puis, dans un deuxième temps, on montre que le seul morphisme d'algèbre(*) qui puisse être défini sur E est ou bien le morphisme nul ou bien un morphisme tel que : $\forall f \in E \quad u_\tau(f) = f(\alpha)$ α étant un réel donné ne dépendant que de τ.

— On en déduit alors une propriété intéressante pour les applications τ, continues sur $\mathcal{C}$, restriction de E aux fonctions continues et possédant la propriété (1).

Enoncé du problème :

La Ière partie et la IIème partie du problème sont indépendantes, sauf le 5° du II.

I - On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{N}$ celui des entiers positifs ou nul.

.../...

(*) Il y a morphisme d'algèbre si l'application vérifie (a), (b) et en outre
(c) $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad u(\lambda f) = \lambda u(f)$.

Soit **E** l'algèbre des fonctions numériques définies sur le segment $[o, 1] \subset \mathbb{R}$ (donc à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Soit τ une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad c > o \quad \forall f \in E \quad \forall g \in E \quad |\tau(f + g) - \tau(f) - \tau(g)| < c.$$

1°) a) Montrer que : $|\tau(2^{n+1} f) - 2\,\tau(2^n f)| < c$.

b) On pose $\tau_n(f) = \dfrac{\tau(2^n f)}{2^n}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad |\tau_{n+p}(f) - \tau_n(f)| < \dfrac{c}{2^n}$

c) En déduire que la suite $\tau_n(f)$ converge vers une limite qu'on notera $u_\tau(f)$. (On pourra montrer plus précisément que la convergence est uniforme sur E).

2°) a) Montrer que $\forall f \in E \quad |\tau(f) - u_\tau(f)| \leqslant c$

b) puis que $\forall f \in E \quad \forall g \in E, \quad u_\tau(f + g) = u_\tau(f) + u_\tau(g)$

c) Montrer que, si l'on suppose de plus que :

$$\forall f \in E, \quad \forall g \in E, \quad |\tau(f.g) - \tau(f).\tau(g)| \leqslant c$$

alors $u_\tau(f.g) = u_\tau(f).u_\tau(g)$

3°) Montrer réciproquement que si une application u de E dans $\mathbb{R}$ vérifie :

$$\forall f \in E, \quad |u(f) - \tau(f)| \leqslant c$$

$$\forall f \in E, \quad \forall g \in E, \quad u(f + g) = u(f) + u(g)$$

alors, u coïncide nécessairement avec u_τ .

II - Soit un morphisme u d'algèbre de E dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall f \in E \quad \forall g \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} u(f + g) &= u(f) + u(g) \\ u(fg) &= u(f).u(g) \\ u(\lambda f) &= \lambda\, u(f) \end{aligned}$$

1°) Si I est l'application de E telle que $\forall x \in [o, 1] \quad I(x) = 1$ montrer que $u(I) = o$ ou bien $u(I) = 1$.

2°) On pose $N(u) = \{ f \mid f \in E, \quad u(f) = o \}$
montrer que si $u(I) = o$, alors N(u) coïncide avec E.

.../...

3°) On suppose <u>désormais</u>, pour la 3ème et la 4ème question que <u>$u(I) = 1$</u>

a) Montrer que si f appartient à N(u), alors f s'annule au moins une fois sur [o, 1].

b) Montrer, en la construisant, qu'il existe au moins une fonction monotone dans N(u).

4°) a) Montrer qu'il existe un nombre α donné, $\alpha \in [o, 1]$ tel que :

$$\forall f \in N(u), \quad f(\alpha) = o$$

b) En déduire que $\forall f \in E, \quad u(f) = f(\alpha)$.

5°) Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des fonctions continues de E, muni d'une norme qu'on notera $\| \ldots . \|$

a) Donner l'exemple d'une telle norme.

b) On considère une application τ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$, <u>continue en 0</u> pour la norme $\| \ldots . \|$, et qui vérifie :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad c > o, \quad \forall f \in E, \ \forall g \in E \quad \begin{matrix} |\tau(f+g) - \tau(f) - \tau(g)| < c \\ |\tau(f.g) - \tau(f).\tau(g)| < c \end{matrix}$$

- montrer que l'application u_τ associée est continue pour $\| \ldots . \|$
- puis montrer que u_τ est un morphisme d'algèbre.

c) En déduire que
$$\begin{cases} \text{- ou bien : } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\tau(2^n f)}{2^n} = o \quad \forall f \in \mathcal{E} \\ \text{- ou bien : } \exists \alpha \in [o, 1] \subset \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\tau(2^n f)}{2^n} = f(\alpha). \end{cases}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail